Résumé 04 : Réduction d'endomorphismes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E sera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Nous avons vu en première année la simplification, dans l'étude des puissances d'une matrice M, que procure le fait de disposer d'une matrice diagonale (ou dans une moindre mesure triangulaire) D semblable à M. Toute la problématique de ce cours, reposant sur ce constat, se résume essentiellement en deux questions :

- Existe-t-il une matrice diagonale D semblable à M ?
- Dans l'affirmative, quelle est-elle ? Et quelle est la matrice de passage sous-jacente ?

Dans tout ce cours E sera un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel . Nous commencerons par un rappel sur ces deux relations d'équivalence.

I Préliminaires

§ 1. ***Les deux relations.—*** **Définition I.1**

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *A est dite équivalente à B lorsqu'il existe P et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.*
2. *A est dite semblable à B lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Remarques :

1. Ces deux relations sont des relations d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui signifie que A est semblable à elle-même, que si A est semblable à B, alors B est semblable à A et qu'enfin si A est semblable à B qui est elle-même semblable à C, alors A est semblable à C.
Evidemment, on peut remplacer toutes les occurrences du mot « semblable » dans cette phrase par « équivalente ».
2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est semblable à B, alors A est équivalente à B. La réciproque est fausse (connaître un contre-exemple).

La question de savoir si deux matrices sont équivalentes est simple : elle se réduit au calcul du rang :

Théorème I.2

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est équivalente à B si et seulement si elles ont même rang.
Ainsi, $r = \text{Rang } A \iff P$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}J_rP$, où $J_r = \text{Diag}(1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r.

Tout ce cours vous convaincra que déterminer si deux matrices sont semblables est bien plus subtil. Nous verrons dans la propostion II.6 que deux matrices semblables partagent eaucoup de propriétés.

§ 2. ***Sous-espaces vectoriels stables par $u \in \mathscr{L}(E)$.—*** C'est une notion qui permet d'obtenir des matrices reprépsentant u avec des blocs de zéros.

Définition I.3 (*sous-espace vectoriel stable*)

Soit u un endomorphisme de E.

1. *Un sous-espace vectoriel F de E est dit* **stable** *par u lorsque $u(F) \subset F$, i.e lorsque pour tout $x \in F, u(x) \in F$*
2. *Si F est stable par u, on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F : $u_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$.*

REMARQUES :

Si $F = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$,
F est stable par $u \Longleftrightarrow$ pour tout $i \in [\![1, p]\!], u(e_i)$ appartient à F.
$\Longleftrightarrow$ la matrice de f dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$

Le fait que Mat $_{\mathscr{B}}(u)$ soit diagonale ou triangulaire se traduit parfaitement en termes de stabilité :

Proposition I.4

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Notons M = Mat $_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

1. *M est diagonale $\Longleftrightarrow$ pour tout $e_i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i)$ est colinéaire à e_i.*
2. *M est triangulaire supérieure $\Longleftrightarrow$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, l' espace vectoriel F_p = Vect $(e_1, \dots, e_p)$ est stable par u.*

Proposition I.5 (*Somme directe de sous-espaces vectoriels stables*)

Soit u un endomorphisme de E. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$ où les E_i sont des sous-espaces vectoriels de E . Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ une base adaptée à cette décomposition de E.
Alors, tous les E_i sont stables par u $\Longleftrightarrow$la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs, i.e est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$, où pour tout $i \in [\![1, p]\!] A_i \in \mathscr{M}_{k_i}(\mathbb{K})$, k_i étant la dimension de E_i.

II ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

§ 1. ***Définitions.***— Soit $u : E \to E$ un endomorphisme du $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.
Nous utiliserons intensivement que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$x \in \ker(u - \lambda \text{Id}_E) \Longleftrightarrow u(x) = \lambda x,$$

et nous noterons, comme il est d'usage, $\boxed{E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)}$.

Définition II.1 (*Eléments propres d'un endomorphisme*)

1. *Soit λ un scalaire. λ est une* **valeur propre** *de l'endomorphisme u*
$\Longleftrightarrow E_\lambda(u) \neq \{0_E\} \Longleftrightarrow \dim E_\lambda(u) \geqslant 1 \Longleftrightarrow \exists x \in E,\ x \neq 0_E / \ u(x) = \lambda x.$
2. *Soit $x \in E$. x est un* **vecteur propre** *de $u \Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq 0_E \\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x \end{cases}$.*
3. *Le* **spectre** *de u, (noté Sp(u)$\subset \mathbb{K}$) est l'ensemble des valeurs propres de u.*
4. *Si λ est une valeur propre de u, on dit que $E_\lambda(u)$ est le* **sous espace propre** *de u associé à λ. c'est donc l'ensemble constitué des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.*

REMARQUES :

1. 0 est une valeur propre de $u \Longleftrightarrow u$ n'est pas injective, car alors l'espace propre associé est $E_0(u) = \ker u$.
2. Si p est un projecteur non trivial, $Sp(p) = \{0, 1\}$.
3. Si s est une symétrie non triviale, alors $Sp(s) = \{-1, 1\}$. Tiens, d'ailleurs, quels sont les sous-espaces propres ?

§ 2. ***Propriétés des éléments propres.—*** Les sous-espaces propres sont en somme directe :

Proposition II.2 (*Espaces propres*)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u.
Les espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe : $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$, ce qui signifie que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $p-$uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E_{\lambda_1}(u) \times \cdots \times E_{\lambda_p}(u)$, on a l'implication

$$\text{si } \sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E, \text{ alors tous les } x_i \text{ sont nuls.}$$

Proposition II.3 (*Stabilité et commutation*)

Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda(u)$ est stable par v. En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par u, et par tout polynôme en u.

Remarques :

1. En bon français, si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
2. Sur $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la dérivation admet une infinité de valeurs propres (tous les réels en fait). Ceci n'est pas possible en dimension finie :

Corollaire II.4

Si E est de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors u possède au plus n valeurs propres distinctes.

§ 3. ***Expression matricielle.—*** de le diagonalisabilité.

Définition II.5

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $L_M \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right.$ l'endomorphisme canoniquement associé. Les vecteurs propres, valeurs propres et sous-espaces propres de M seront par définition ceux de L_M.

Dans la proposition suivante, nous anticipons sur la suite du cours, mais ceci n'est qu'un résumé....

Proposition II.6 (*Spectre de matrices semblables*)

Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors

- $\chi_A = \chi_B$.
- *A et B ont même spectre, même trace, même déterminant, mêmes multiplicités.*
- *Pour toute valeur propre λ de A, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$.*

Remarques :

- A nouveau, les matrices triangulaires nous dispensent de calculs fastidieux :
  Soit T une matrice triangulaire $\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le spectre de T est exactement l'ensemble des coefficients diagonaux de T.
- Pour les puristes, si $A = P^{-1}BP$, alors $P\Big(E_\lambda(A)\Big) = E_\lambda(B)$.

Heureusement, il y a coïncidence parfaite entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux de toute matrice le représentant :

Proposition II.7

Soit $u \in \mathscr{L}(E), \mathscr{B}$ une base de E, et $M = Mat_{\mathscr{B}}(u)$. Alors le spectre de M est égal à celui de u, et leurs sous-espaces propres ont même dimension.

§ 4. ***Endomorphisme diagonalisable.***— On suppose ici que E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition II.8 (*Diagonalisable*)

Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est diagonalisable lorsque l'une des propriétés **équivalentes** *suivantes est vérifiée :*

1./ *Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

2./ *Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.*

3./ *E est somme directe des espaces propres de u : $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$.*

4./ $$\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E.$$

Exemples :

1. Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.
2. Aucune rotation de $\mathbb{R}^2$ autre que $\pm I_2$ n'est diagonalisable.

Définition II.9

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e si et seulement si il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Le lien entre les endomorphismes et leurs matrices est cohérent :

Proposition II.10

- *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ l'endomorphisme $L_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.*
- *Soit f un endomorphisme sur un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E de dimension finie n. Alors*

$$\begin{aligned} f \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonale} \\ &\iff \text{pour toute base } \mathscr{B} \text{ de } E,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable.} \end{aligned}$$

On a ainsi heureusement l'équivalence entre la diagonalisabilité d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ et celle de sa matrice dans n'importe quelle base.

Exemples :

1. Toute matrice A qui vérifie $A^2 = A$ ou $A^2 = I_n$ est diagonalisable.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
3. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mais l'est dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
4. Si A n'admet qu'une seule valeur propre λ et qu'elle est diagonalisable, alors $A = \lambda I_n$.
5. $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable $\iff a = 0$.

Théorème II.11 (*Une condition SUFFISANTE de diagonalisabilité*)

Notons $n = \dim E$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Si u admet n valeurs propres distinctes deux à deux, alors il est diagonalisable.

Remarques :

- Cette condition n'est pas nécessaire, comme le prouve le contre-exemple d'une homothétie.

III Polynôme caractéristique

E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et u est ici un endomorphisme de E.

Définition III.1 (*Polynôme caractéristique d'un endomorphisme*)

Le polynôme caractéristique de u est défini par : $\boxed{\chi_u(X) = \det(u - X Id_E)}$.

- *L'ensemble des racines de χ_u est égal à l'ensemble des valeurs propres de u.*
- *Pour toute valeur propre λ de u, on note Mult(λ) la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.*

Proposition III.2 (*Propriétés du polynôme caractéristique*)

1. *χ_u est un polynôme de dégré n unitaire.*
2. *$\chi_u(X) = X^n -$ Trace $(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u$.*
3. *Pour toute valeur propre λ de u, on a $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant$ Mult(λ).*

Remarques :

1. Si $\dim E = 2$, alors $\chi_u(X) = X^2 -$ Trace $(u)X + \det u$.
2. Si u est un projecteur de rang r, alors $\chi_u(X) = (-1)^n (X-1)^r X^{n-r}$.
3. Il faudrait savoir calculer le polynôme caractéristique d'un matrice compagnon.

Théorème III.3 (*Critère assurant qu'un endomorphisme est diagonalisable*)

u est diagonalisable si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *le polynôme caractéristique de u est scindé*
2. *$\forall \lambda \in$ Sp(u), Mult$(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$.*

Proposition III.4 (*Cas particuliers*)

1. *Si λ est une racine simple du polynôme caractéristique alors $\dim E_\lambda = 1$. Les racines simples ne nécessitent aucune vérification lorsque l'on souhaite s'assurer qu'un endomorphisme est diagonalisable.*
2. ***Si** le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples **alors** u est diagonalisable et les espaces propres sont des droites.*

Enfin, voici un théorème qui vous fait entrevoir un intérêt des sous-espaces vectoriels stables par u : en trouver permet de factoriser χ_u, donnant ainsi des informations essentielles pour réduire u. A noter que l'image de u est toujours un sous-espace vectoriel stable par u. Ainsi, si $\ker u \oplus \text{Im } u = E$[1], et que le rang de u est petit, ça doit être bien utile.

Proposition III.5

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ laisse stable le sous-espace vectoriel F de E, et si on note $u_{|F}$, alors le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise celui de u.

IV Trigonalisation

Nous avons vu qu'une matrice n'est pas toujours diagonalisable, même dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Cependant, nous allons montrer qu'il existe dans la classe de similitude de toute matrice une matrice triangulaire, ce qui simplifie sensiblement les calculs.

E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. tiens, ça voudrait dire que cette égalité n'est pas toujours vraie ? ? ? ? ? ?

Définition IV.1

- *Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit* **trigonalisable** *lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*
- *Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* **trigonalisable** *lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.*

Remarques :

Vous commencez à être habitués : un endomorphisme est trigonalisable $\Longleftrightarrow$ toute matrice le représentant dans une base de E est également trigonalisable.

Théorème IV.2

Si u a un polynôme caractéristique scindé, alors u est trigonalisable.
En particulier, tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel est trigonalisable.

Corollaire IV.3

Si χ_u est scindé, et si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, alors $\begin{cases} \text{Trace }(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \\ \det(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \end{cases}$.

Définition IV.4

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension quelconque.
Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit **nilpotent** *lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On appelle alors* **indice de nilpotence** *de f le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que f^p est nulle.*
On définit de même la nilpotence des matrices, et on a un lien parfait entre ces deux notions.

Exemples :

- Toute matrice triangulaire de diagonale nulle est nilpotente. La réciproque est fausse : toute matrice nilpotente n'est pas triangulaire de diagonale nulle, mais semblable à une matrice triangulaire de diagonale nulle.
- Il faudrait connaitre les puissances de la matrice $J = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition IV.5

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,

- $1 \leqslant p \leqslant n$.
- *Le spectre de f est $\{0\}$.*

Finissons par un critère de nilpotence :

Proposition IV.6

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors,

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{L}(E) \text{ est nilpotent} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est trigonalisable, et} \\ \mathrm{Sp}(f) = \{0\} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \chi_f(X) = X^n. \end{aligned}$$

ANNEXE

A Les figures imposées

Exercices :

CCP-Algèbre 67

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels. M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercices :

CCP-Algèbre 69 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel.

1. Déterminer la rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-ell diagonalisable ?

Exercices :

CCP Algèbre 72

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable (discuter en fonction de v) ?

Exercices :

CCP-Algèbre 73 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.